**Kółko z potęgi punktu**

**1.1.** Niech $o_1, o_2$ będą okręgami o środkach odpowiednio $O_1, O_2$. Pokazać, że zbiór punktów o równej potędze względem obu okręgów jest prostą. Jak wygląda ta prosta, gdy okręgi przecinają się?

**1.2.** Okręgi $o_1, o_2, o_3$ przecinają się odpowiednio w punktach: $o_1, o_2$ w $A, B$; $o_2, o3$ w $C, D$; $o_3, o_1$ w $E$ i $F$. Wykazać, że proste $AB$, $CD$, $EF$ przecinają się w jednym punkcie.

**1.3.** Na podstawie zadania 1.2. pokazać, że w dowolnym trójkącie wysokości przecinają się w jednym punkcie.

**2.1.** Trzy różne punkty $A$,$B$,$C$ leżą na okręgu $o$. Proste styczne do okręgu $o$ w punktach $A$ i $B$ przecinają się w punkcie $P$. Prosta styczna do okręgu o w punkcie $C$ przecina prostą $AB$ w punkcie $Q$. Udowodnić, że $PQ^2 = PB^2 + QC^2$.

**2.2.** Niech $o_1, o_2$ będą okręgami rozłącznymi. Proste $k, l, m, n$ są ich wspólnymi stycznymi. Niech $X_1, X_2, X_3, X_4$ będą środkami odcinków pomiędzy punktami styczności $k, l, m, n$ z okręgami. Pokazać, że punkty te leżą na jednej prostej.

**2.3.** Okręgi $o_1, o_2$ przecinają się w punktach $A$ i $B$. Prosta $k$ jest styczna do obu okręgów w punktach odpowiednio $C$ i $D$. Niech $M$ będzie środkiem odcinka $CD$. Niech $E$ będzie punktem symetrycznym do $B$ względem $M$. Niech $o_3, o_4$ będą okręgami mającymi za średnice odpowiednio odcinki $AE$ i $CD$, przecinające się w punktach $X_1, X_2$. Udowodnić, że $X_1X_2$ jest średnicą okręgu $o_4$.

**2.4** Wewnątrz trójkąta $ABC$ dany jest punkt $P$. Na półprostej $PC$ obrano taki punkt $C'$ na zewnątrz $ABC$, by punkty $A'$ i $B'$ tzn. przecięcia odpowiednio okręgów opisanych na $ACC'$ i $BCC'$ z półprostymi $PA$ i $PB$ różne od $A$ i $B$ leżały również na zewnątrz $ABC$. Udowodnić, że wówczas na czworokącie $ABB'A'$ da się opisać okrąg.

**2.5.** Niech $o_1, o_2$ będą okręgami o środkach odpowiednio $O_1, O_2$ i promieniach $r_1, r_2$, przecinającymi się. Niech $A, B, C, D$ będą punktami przecięcia prostej $O_1O_2$ z okręgami i leżą w tej właśnie kolejności na omawianej prostej. Ponadto spełniona jest równość: $O_1B \cdot O_1D = r_1^2$.
Wykazać, że:
a) $O_2A \cdot O_2C = r_2^2$
b) okręgi $o_1, o_2$ są prostopadłe (tzn. ich styczne w punktach przecięcia są prostopadłe)

**1.3** Okrąg wpisany w trójkąt $ABC$ jest styczny do boków $AC$ i $BC$ odpowiednio w punktach $D$ i $E$. Punkt $F$ jest rzutem prostokątnym punktu $A$ na prosta $BC$. Punkt $K$ jest symetryczny do punktu $F$ względem prostej $DE$. Dowieść, ze punkt $K$ leży na dwusiecznej kąta $BAC$.