Kółko z podzielności symbolów Newtona i innych bzdetów

1. Dowieść, że istnieje takie $n > 2003$, że w ciągu

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{2003}$$

każdy wyraz jest dzielnikiem wszystkich wyrazów po nim następujących.

2. Dany jest taki n, że dla każdego k całkowitego dodatniego, mniejszego od n, zachodzi podzielność:

$$n | \binom{n}{k}$$

Pokazać, że n jest liczbą pierwszą.

3. Dana jest liczba pierwsza p. Znaleźć wszystkie liczby naturalne n, że podzielność:

$$p | \binom{n}{k}$$

zachodzi dla każdego k z przedziału od 1 do $n - 1$.

4. Na płaszczyźnie dany jest okrąg Γ oraz punkt A. Rozważamy wszystkie okręgi przechodzące przez A i przecinające okrąg Γ w dwóch punktach leżących na końcach jego średnicy. Pokazać, że wszystkie rozważane okręgi mają punkt wspólny różny od A.

5. Każdy punkt płaszczyzny pokolorowano na jeden z 2 kolorów. Pokazać, że istnieje trójkąt równoboczny o wierzchołkach tego samego koloru.

6. Na płaszczyźnie dany jest układ współrzednych. Każdy punkt kratowy pomalowano na jeden z 3 kolorów. Pokazać, że istnieje prostokąt o bokach równoległych do osi układu o wierzchołkach jednego koloru.

7. Pokazać, że teza poprzedniego zadania jest prawdziwa dla dowolnych k kolorów.