Zadanka na wielomiany

1. Wielomian $Q(x)$ o współczynnikach całkowitych dla k kolejnych liczb całkowitych przyjmuje wartości podzielne przez k. Udowodnić, że dla dowolnego x całkowitego $Q(x)$ jest podzielne przez k.

2. Dany jest ciąg X 1001 liczb całkowitych $x_1, x_2, \ldots, x_{1001}$ o następującej własności: dla dowolnego wielomianu $P(x)$ stopnia 2 o współczynnikach całkowitych istnieją trzy elementy ciągu X, mianowicie k, l, m, że $P(k) = P(l) = P(m)$. Pokazać, że w ciągu X istnieje co najmniej jedna trójka równych wyrazów.

3. Czy istnieje wielomian stopnia co najmniej 1 mający wszystkie możliwe wartości będące liczbami złożonymi?

4. Czy istnieje wielomian stopnia co najmniej 1 mający wszystkie możliwe wartości nie będące liczbami złożonymi?

5. Rozwiązać układ równań w rzeczywistych a, b, c, d:

$$\begin{cases} a+b+c+d=4 \\ ab+ac+ad+bc+bd+cd=-1 \\ abc+abd+acd+bcd=-16 \\ abcd=-12. \end{cases}$$

6. Rozwiązać układ równań w rzeczywistych a, b, c:

$$\begin{cases} a+b+c=2 \\ a^2+b^2+c^2=14 \\ a^3+b^3+c^3=20. \end{cases}$$

7. Wielomian $P(x)$ stopnia n o współczynnikach rzeczywistych dla dowolnej liczby $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ spełnia równość:

$$P(k) = \frac{k}{k+1}$$

Obliczyć $P(n+1)$.

7. Wielomian $P(x)$ o współczynnikach całkowitych spełnia podzielności $5|P(2)$ i $2|P(5)$. Pokazać, że $10|P(7)$.

8. Niech $P(x)$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Udowodnić, że jeśli w conajmniej sześciu różnych liczbach całkowitych przyjmuje on wartość 12, to nie ma pierwiastków całkowitych.