Kółko z teorii liczb

1.T. Dana jest liczba pierwsza p oraz liczby całkowite x, y, z, że

$$0 < x < y < z < p$$

Wykazać, że jeśli liczby x^3, y^3, z^3 dają równe reszty z dzielenia przez p to $x^2 + y^2 + z^2$ dzieli się przez $x + y + z$.

2.T. Pokazać, że dla dowolnych a,b całkowitych dodatnich liczby a oraz $a^2 + 3b(a + b)$ nie mogą być obie jednocześnie sześcianami liczb całkowitych.

3.T. Pokazać, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ można znaleźć n różnych liczb naturalnych takich, że suma dowolnych dwóch spośrod tych liczb jest podzielna przez ich różnicę.

4.Ś. Rostrzygnąć, dla jakich n, ze zbioru $\{n^2 + 1, n^2 + 2, \ldots n^2 + 2n\}$ da się wybrać a, b, c, że $c|a^2 + b^2$.

5.Ł. Liczbą Grabowskiego nazywamy liczbę składającą się z samych jedynek. Pokazać, że dla każdego $n \perp 10$ istnieje liczba Grabowskiego podzielna przez n.

6.Ł. Pokazać, że dla każdego p nieparzystego pierwszego istnieje nieskończenie wiele k całkowitych dodatnich, że:

$$p|\sum_{i=1}^{p-1} i^k$$

7.Ł. Pokazać, że dla każdego naturalnego n istnieje wyraz ciągu Fibonacciego podzielny przez n.

8.Ś. Niech n i m będą liczbami naturalnymi. Pokazać, że jeśli $n|m$ to $f_n|f_m$, gdzie f_i to i-ty wyraz ciągu Fibonacciego.

UWAGA. Ciąg Fibonacciego definiujemy następująco:

$$f_1 = 1, f_2 = 1, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$