Kółko z przeróżnych rzeczy

1. Pokazać, że dla dowolnych ciągów $x_i, b_i \in \mathbb{R}^+$ długości n, że $\sum x_i = \sum b_i = 1$ zachodzi:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{b_i} \geqslant 1$$

2. Pokazać, że dla dowolnego ciągu $a_i \in \mathbb{R}^+$ długości n,że $\prod a_i = 1$ zachodzi:

$$\prod_{i=1}^{n} (2 + a_i) \geqslant 3^n$$

3. Rostrzygnąć, czy szachownicę 11×10 da się pokryć poziomymi klockami 2×1 i pionowymi 3×1.

4. Na bokach CD i AB kwadratu ABCD o boku 1 obrano odpowiednio punkty $X_1, X_2, \ldots, X_{1001}$ i $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{1001}$. Pokazać, że jeśli l to długość łamanej $AX_1Y_1X_2Y_2\ldots X_{1001}Y_{1001}C$ to zachodzi:

$$\sqrt{2003^2+1} \leqslant l \leqslant 2003\sqrt{2}$$

5. Dla jakich $k \in \{0, 1, 2, \ldots 31\}$ równanie

$$2^x + k = 33^y$$

ma rozwiązanie w x, y całkowitych nieujemnych?

6. Funkcja $f : \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ spełnia następujące warunki dla wszystkich n całkowitych nieujemnych:

$$f(2n) = 3f(n)$$

$$f(2n+1) = f(2n) + 1$$

Jakie liczby należa do zbioru wartości funkcji f?

JACO. Na płaszczyźnie dany jest kąt i punkty A i B wewnątrz niego. Skonstruować trojkąt równoramienny o podstawie na jednym ramieniu kąta, wierzchołku między równymi ramionami na drugim oraz tak, by punkty A i B należały do dwóch różnych ramion.