Kółko z stereometrii

1. Wewnątrz trójkąta ostrokątnego ABC obrano punkt P zaś K, L, M są jego rzutami na boki BC, AC, AB odpowiednio. Pokazać, że:

$$8|PK||PL||PM| \leqslant |PA||PB||PC|$$

2. Pokazać, że dla dowolnych $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ zachodzi:

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a^3+63bcd}} + \frac{b}{\sqrt[3]{b^3+63acd}} + \frac{c}{\sqrt[3]{c^3+63abd}} + \frac{d}{\sqrt[3]{d^3+63abc}} \geqslant 1$$

3. Pokazać, że dla dowolnych $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ zachodzi:

$$\sqrt{\frac{a^3}{b+c}} + \sqrt{\frac{b^3}{c+d}} + \sqrt{\frac{c^3}{d+a}} + \sqrt{\frac{d^3}{a+b}} \geqslant \frac{a+b+c+d}{\sqrt{2}}$$

4. Punkt M jest środkiem okręgu k. Okrąg k_1 ma środek S na okręgu k i promień odeń mniejszy. Niech X będzie Dowolnym punktem odcinka MS leżącym na zewnątrz okręgu k_1. Prosta styczna do k_1 przechodząca przez X przecina k w A i B. Niech a i b będą prostymi stycznymi do k_1 przechodzącymi przez A i B odpowiednio i nie zawierającymi punktu X. Pokazać, że proste a, b i SM przecinają sie w jednym punkcie.

5. Dla czworościanu $ABCD$ wiadomo, że istnieje sfery styczna do odcinków AB, BC, CD, DA odpowiednio w punktach K, L, M, N. Pokazać, że wówczas K, L, M, N leżą na jednej płaszczyźnie.

6. W przestrzeni dany jest trójkąt ABC oraz sfera s rozłączna z płaszczyzna ABC. Przez każdy z punktów A, B, C poprowadzono prostą styczną do tej sfery. Punkty styczności oznaczono odpowiednio K, L, M. Punkt P leży na sferze s i spełnia warunki:

$$\frac{AK}{AP} = \frac{BL}{BP} = \frac{CM}{CP}$$

Udowodnić, że sfera opisana na czworościanie $ABCP$ jest styczna do sfery s.

7. Czworościan $ABCD$ ma następującą własność: isnieje sfera $\kappa = \kappa(ABC)$ posiadająca tę własność, że każdy z boków trójkąta ABC jest średnicą okręgu powstałego przecięcia odpowiedniej ściany czworościanu (ABD, ACD, BCD) z tą sferą. Pokazać, że wówczas istnieją sfery analogicznie określone dla pozostałych ścian czworościanu.

8. W czworościanie $ABCD$ odbito: C względem A uzyskując K, B względem C uzyskując L, A względem D uzyskując M oraz C względem D uzyskując N. Pokazać, że objętość czworościanu $KLMN$ jest dwa razy większa od objętości czworościanu $ABCD$.