Kółko z Jensena

1. Pokazać, że dla $x, y, z \in \mathbb{R}^+$, że $x + y + z = 1$ zachodzi:

$$\frac{3x+1}{x+1} + \frac{3y+1}{y+1} + \frac{3z+1}{z+1} \leqslant \frac{9}{2}$$

2. Pokazać, że dla $x, y, z \in \mathbb{R}^+$, że $x + y + z = 1$ zachodzi:

$$x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} + z^{\frac{3}{2}} \leqslant \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

3. Pokazać, że dla $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ zachodzi:

$$x\sqrt{y+z} + y\sqrt{x+z} + z\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{2(x+y+z)(xy+yz+zx)}$$

4. Pokazać, że dla dowolnych $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ zachodzi:

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a^3+63bcd}} + \frac{b}{\sqrt[3]{b^3+63acd}} + \frac{c}{\sqrt[3]{c^3+63abd}} + \frac{d}{\sqrt[3]{d^3+63abc}} \geqslant 1$$

5. Pokazać, że dla dowolnych $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ zachodzi:

$$\sqrt{\frac{a^3}{b+c}} + \sqrt{\frac{b^3}{c+d}} + \sqrt{\frac{c^3}{d+a}} + \sqrt{\frac{d^3}{a+b}} \geqslant \frac{a+b+c+d}{\sqrt{2}}$$

6. Liczby x, y, z są nieujemne i sumują się do $\frac{\pi}{2}$. Pokazać, że:

$$1 \leqslant \sin x + \sin y + \sin z \leqslant \frac{3}{2}$$

7. Wewnątrz trójkąta ostrokątnego ABC obrano punkt P zaś K, L, M są jego rzutami na boki BC, AC, AB odpowiednio. Pokazać, że:

$$8|PK||PL||PM| \leqslant |PA||PB||PC|$$

8. Liczby x, y, z są dowolnymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi, zaś t jest dowolną liczbą rzeczywistą. Oznaczmy: $L = x^t y + xy^t + x^t z + xz^t + y^t z + yz^t$ oraz $P = 2(x+y+z)(\frac{xy+yz+xz}{x+y+z})^t$. Dla jakich t dla dowlnego wyboru x, y, z zachodzi zawsze $L \leqslant P$ a dla jakiego $L \geqslant P$?