Kombinatoryka

1. Klockiem będziemy nazywać bryłe powstałą w wyniku wyrzucenia jednego z sześcianików jednostkowych z sześcianu $2\times2\times2$ złożonego z sześciańików jednostkowych. Pokazać, że dowolny sześcian $2^k \times 2^k \times 2^k$ z wyrzuconym dowolnym sześcianikiem jednostkowym da się zbudować z klocków.

2. W n-osobowym stowarzyszeniu działa sześć komisji. W skład każdej z nich wchodzi grupa nie mniej niż $n/4$ osób. Dowieść, że istnieją dwie komisje oraz grupa licząca nie mneij niż $n/30$ osób, należących do obu tych komisji.

3. W grupie $n \geqslant 3$ osób każda ma parzystą (być może zerową) liczbę znajomych. Pokazać, że istnieją trzy osoby mające taką samą liczbę znajomych.

4. W turnieju tenisowym brało udział n graczy. Każdy rozegrał z każdym innym jeden mecz przy czym w tenisie nie ma remisów. Udowodnić, że istnieje taki gracz A, który pokonał każdego innego gracza B bezpośrednio lub pośrednio, tzn. A wygrał z B, lub A pokonał pewnego przeciwnika C, który wygrał z B.

5. Ze środka kwadratu wybiega promień świetlny, który odbija się od boków kwadratu zgodnie z zasadą odbicia. Po pewnym czasie promień wraca do środka kwadratu. Promień nie trafił w wierzchołek, ani nie trafił wcześniej w środek. Pokazać, że liczba odbić od boków kwadratu jest nieparzysta.

6. Na tablicy napisana jest trójka liczb. Ruch polega na wybraniu jednej z nich i zastąpieniu jej sumą tej liczby i różnicy dwóch pozostałych pomnożonej przez dowolną liczbę wymierną. Rostrzygnąć, czy startując od trójki $0, 1, \sqrt{2}$ przy pomocy takich ruchów możemy otrzymać trójkę (nieuporządkowaną) $0, \sqrt{2}, 2$.

7. Dowieść, że kwadratowej szachownicy 43×43 z wyciętym środkowym polem nie da się podzielić na prostokąty 1×6.

8. Na ile sposobów da się podzielić liczby ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 1995\}$ na trzy niepuste podzbiory, z których żaden nie zawiera dwóch kolejnych liczb całkowitych?