Siłowa trygonometria

- A,B,C - wierzchołki trójkąta
- a,b,c - boki trójkąta naprzeciw odpowiednich wierzćhołkow
- α,β,γ - kąty przy odpowiednich wierzchołkach
- r,R - promienie okręgów wpisanego i opisanego

1. W trójkącie ABC punkty K,L,M są punktami styczności okręgu wpisanego weń z bokami. Pokaźać, że zachodzi:

$$\frac{[ABC]}{[KLM]} = \frac{2R}{r}$$

2. W trójkącie ABC dwusieczna kąta $\angle A$ przecina okrąg opisany w punkcie D. Niech E i F będą rzutami B i C odpowiednio na prostą AD. Pokazać, że:

$$AD \geqslant BE + CF$$

3 (tryg. Ceva). Wewnątrz trójkąta ABC obrano punkt P. Proste PA,PB,PC dzielą kąty α,β,γ na kąty α_1,α_2,β_1,β_2,γ_1,γ_2 oznaczone zgodnie z ustaloną orientacją. Pokazać, że zachodzi:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \cdot \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} \cdot \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = 1$$

4. Dany jest trójkąt ABC w którym $\angle A$ jest rozwarty oraz $\angle B = 2(\angle A - \frac{\pi}{2})$. Na dwusiecznej kąta B obrano punkt D by $\angle DAB = \angle B$. Punkt M jest środkiem odcinka AB. Pokazać, że C,D,M są współliniowe.

5. Pokazać, że $P = \frac{abc}{4R}$.

6. Niech a,b,c będą liczbami rzeczywistymi dodatnimi. Pokazać, że:

$$(a^2 + ac + c^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant (a^2 - ab + b^2)^{\frac{1}{2}} + (b^2 - bc + c^2)^{\frac{1}{2}}$$

7. W równoległoboku $ABCD$ do boków AB i AD dobudowano dwa podobne trójkąty równoramienne ABP i ADQ, by wierzchołki B i D leżały między równymi ramionami. Pokazać, że trójkąt PCQ jest podobny do dobudowanych trójkątów.

8. Wyznaczyć wszystkie wartości wyrażenia $5ab+3bc+4ac$ dla liczb rzeczywistych dodatnich a,b,c spełniających równości:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 9 \\ 5a^2 + 5c^2 + 6ac = 80 \\ 5b^2 + 5c^2 + 8bc = 125 \end{cases}$$