Norweska olimpiada

1. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, zaś K,L,M,N są środkami boków AB,BC,CD i DA odpowiednio. Odcinki KM i LN przecinają się w S. Pokazać, że:

$$[AKSN] + [CMSL] = [BLSK] + [DNSM]$$

2. W okręgu o wybrano średnicę AB oraz punkt C różny od A i od B. Styczna do okręgu w punkcie C przecina przedłużenie AB w punkcie D. Pokazać, że dwusieczna kąta CDA odcina z kąta ACB trójkąt równoramienny.

3. Niech A,B,C będą takimi punktami na okręgu o, że AB=AC. Na boku BC obrano punkt E, zaś F jest przecięciem prostej AE z okręgiem. Pokazać, że iloczyn $AE \cdot AF$ nie zależy od wyboru punktu E.

4. Znaleźć wszystkie p,q,r pierwsze i n naturalne, że zachodzi:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{n}$$

5. O funkcji f, ze zbioru całkowitych dodatnich w rzeczywiste wiemy, że $f(1) = 1$ i $f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n) = n^2 \cdot f(n)$. Ile jest równe $f(1995)$?

6. Dwudziestu ludzi wysyłało do siebie listy, przy czym wiadomo, że każdy wysłał listy do dokładnie dziesięciu innych. Pokazać, że istnieje para, która wysłała listy do siebie wzajemnie.

7. Pokazać, że jeśli $x_1, x_2, \ldots, x_{1994}$ są liczbami rzeczywistymi dodatnimi, to zachodzi nierówność:

$$(\frac{x_1}{x_2})^{\frac{x_1}{x_2}}(\frac{x_2}{x_3})^{\frac{x_2}{x_3}} \ldots (\frac{x_{1993}}{x_{1994}})^{\frac{x_{1993}}{x_{1994}}} \geqslant (\frac{x_1}{x_2})^{\frac{x_2}{x_1}}(\frac{x_2}{x_3})^{\frac{x_3}{x_2}} \ldots (\frac{x_{1993}}{x_{1994}})^{\frac{x_{1994}}{x_{1993}}}$$

8. Roztrzygnąć, czy istnieje taka funkcja $f(x)$ z całkowitych w całkowite, by dla każdego x całkowitego zachodziło $f(f(x)) = x + 1$.

9. Dla wielomianu $P(x)$ o współczynnikach całkowitych wiadomo, że istnieją takie różne a i b, że $P(a) = b$ i $P(b) = a$. Pokazać, że równanie $P(x) = x$ może miec co najwyżej jedno rożwiązanie całkowite.