Kółko z podstaw nierówności

grupa twardsza

1. Pokazać ze dla dowolnych $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ zachodzi:

$$a + b + c + d \geqslant \frac{15}{2^{\frac{34}{15}}} \sqrt[15]{ab^2c^4d^8}$$

2. Niech $n \in \mathbb{Z}^+$. Niech x_i, p_i, q_i będą takimi ciągami długości n, że $x_i \in \mathbb{R}^+$, $p_i \in \mathbb{R}$, $q_i \in \mathbb{R}$, $\sum_{j=1}^{n} p_j = \sum_{j=1}^{n} q_j$. Pokazać, że wówczas:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i+1}^{p_1} x_{i+2}^{p_2} \dots\ x_{i+n}^{p_n}}{x_{i+1}^{q_1} x_{i+2}^{q_2} \dots\ x_{i+n}^{q_n}} \geqslant\ n$$

gdzie wyrazy x_i są indeksowane cyklicznie.

3. Pokazać, że dla dowolnych $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ zachodzi:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2a + 2b + 2c \geqslant\ 3((ab)^{\frac{2}{3}} + (bc)^{\frac{2}{3}} + (ca)^{\frac{2}{3}})$$

4. Niech $x \in \mathbb{R}^+$ oraz $k \in \mathbb{Z}^+$. Wykazać, że wówczas:

$$2^k + x - 2 \geqslant\ 2^{\frac{k-1}{2}} x^{\frac{1}{k}} k$$

5. Dany jest czworościan $ABCD$, taki, że $\angle\ ADB = \angle\ BDC = \angle\ CDA = 90°$. Pokazać, że jeśli l to obwód trójkąta ABC to zachodzi:

$$l \geqslant \sqrt{2}(AD + BD + CD)$$

6. Pokazać, że dla $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ takich, że $x + y + z = 1$, zachodzi:

$$\frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1} \leqslant \frac{3}{4}$$

7. Liczby $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ spełniają warunek:

$$(x + y + z)(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}) < 10$$

Pokazać, że z odcinków o długościach x, y, z da się zbudować trójkąt.

8. Pokazać, że dla dowolnych $a, b, c \in \mathbb{R}$ zachodzi:

$$\sqrt{2(a^2 + b^2)} + \sqrt{2(b^2 + c^2)} + \sqrt{2(c^2 + a^2)} \geqslant \sqrt{3(a+b)^2 + 3(b+c)^2 + 3(c+a)^2}$$